МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

из предмета анализа са алгебром

Класичне неједнакости и примене

Ученик

Миодраг Радојевић, 4а

Ментор

др Миљан Кнежевић

Београд, јун 2015.

Садржај

1 Увод

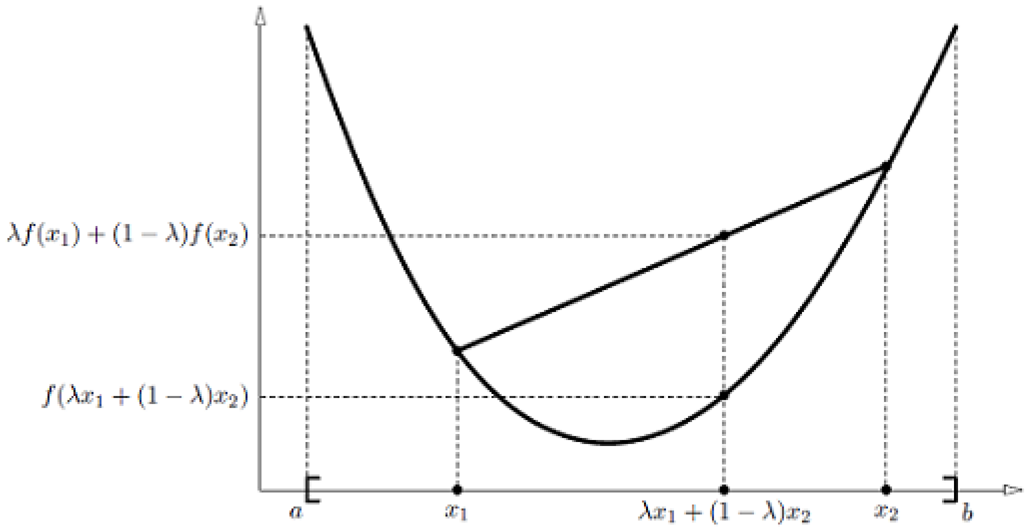
Сама идеја одређивања или ограничавања вредности неког израза, поготово када је у питању већи број променљивих, може бити врло захтевна. У проценама да ли је нешто веће, мање или једнако наступају неједнакости.
Данас су неједнакости врло развијена област математике, која независно од других редовно заузима почасно место на најпрестижнијим математичким надметањима. Поред тога, налазе се у ускоj корелацији са другим областима, где се редовно користе као математички апарат.
Неједнакости као једна врло занимљива и креативна област навеле су ме да се у овом раду бавим управо њиховим истраживањем.
Рад је првенствено заснован на Јенсеновој неједнакости, као можда најопштијој од свих. Даље је представљено неколико класичних неједнакости, њихове међусобне повезаности, уопштења и све то, наравно, испраћено је њиховим применама.

2 Конвексне функције и Јенсенова неједнакост

Једна од најмоћнијих неједнакости носи име по данском математичару **Јохану Јенсену**, који је први доказао 1906. године. Управо ова, Јенсенова неједнакост, када је реч о области неједнакости пружа нам огромне могућности. Кроз овај рад покушаћемо да прикажемо неке од њих.
Пре него што је докажемо, од значаја ће нам бити увођење појма конвексне, односно конкавне функције.

2.1 Конвексне и конкавне функције

Прво представимо графички смисао конвексне функције.
Уколико за неку функцију f на произвољном интервалу (x_1, x_2) из домена, за свако x из тог интервала, вредност функције $f(x)$ је испод дужи $\overline{x_1 x_2}$ сматрамо да је функција f конвексна на том интервалу.



Слика 1.

Како смо интуитивно представили конвексну функцију, сада ћемо увести њену строгу аналитичку дефиницију.

Дефиниција 1. *За функцију $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, кажемо да је* ***конвексна*** *ако и само ако $\forall x, y \in (a,b)$ и за свако $0 \leqslant t \leqslant 1$ важи неједнакост:*

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geqslant f(tx + (1-t)y)$$

Функција f је ***конкавна*** *ако је функција $-f$ конвексна, односно ако увек важи обрнута неједнакост:*

$$tf(x) + (1-t)f(y) \leqslant f(tx + (1-t)y)$$

Под условом да је $x \neq y$, ако се једнакост у претходним неједнакостима достиже само у случајевима $t = 0$ или $t = 1$ за функцију f кажемо да је ***строго конвексна*** (тј. ***строго конкавна***).

Теорема 1. *Ако функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ у свакој тачки $x \in (a, b)$ има други извод, неопходно је и довољно да $f''(x) \geqslant 0$ да би f била конвексна на (a, b).*

Доказ. Посматрајмо функцију $g(x) = tf(x)+(1-t)f(y)-f(tx+(1-t)y)$, за $0 < t < 1$, јер у случајевима $t = 0$ и $t = 1$ неједнакост тривијално следи.
Претпоставимо да су t и y константе. Сада урадимо извод ове функције по x. Имамо, $g'(x) = tf'(x) - tf'(tx + (1 - t)y)$.
Неопходно је и довољно да $f''(x) \geqslant 0, (\forall x) \in (a, b)$, да $f'(x)$ буде растућа на (a, b).
Уочимо да је $g'(x) \geqslant 0$ за $x \geqslant tx+(1-t)y$. Односно $g'(x) \geqslant 0$ за $x \geqslant y$. Слично, $g'(x) \leqslant 0$ за $x \leqslant y$. Како је $g'(y) = 0$ минимум функције $g(x)$ остварује се за $x = y$. Одатле имамо $g(x) \geqslant g(y) = 0, (\forall x) \in (a, b)$, тј. важи $tf(x)+(1-t)f(y) \geqslant f(tx+(1-t)y)$. □

2.2 Јенсенова неједнакост и примене

Конвексне функције дефинисане су неједнакошћу:

$$tf(x) + (1 - t)f(y) \geqslant f(tx + (1 - t)y)$$

где су x, y из (a, b) и $0 \leqslant t \leqslant 1$.
Сада ову дефиницију запишимо у другачијем облику где имамо: $\lambda_1 = t, \lambda_2 = 1 - t, x_1 = x$ и $x_2 = y$, па је

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \geqslant f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2),$$

уз почетне услове који су сада: $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и $x_1, x_2 \in (a, b)$. Покажимо да неједнакост важи за комбинације са више сабирака.

Теорема 2. (Јенсенова неједнакост) *Нека је $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ конвексна функција и нека су $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ненегативни бројеви, такви да је $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$. Тада за све $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b)$ важи неједнакост*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \geqslant f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i).$$

Ако је функција f строго *конвексна, тада једнакост важи ако и само ако су сви x_i међу собом једнаки, или су сви λ_i сем једног једнаки нули. Слично ако је f* строго *конкавна.*

Доказ. Теорему доказујемо принципом математичке индукције. За $n = 2$ тврђење се своди на дефиницију конвексне функције и важи по претпоставци. Претпоставимо да тврђење важи за произвољних $n-1$ бројева x из интервала (a, b) и произвољних $n-1$ ненегативних коефицијената чији је збир једнак 1. Нека су $x_1, x_2, ..., x_n$ произвољни елементи интервала и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ненегативни реални бројеви за које је $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Означимо са $\omega = \lambda_2 + ... + \lambda_n$. Тада су $\frac{\lambda_2}{\omega}, ..., \frac{\lambda_n}{\omega}$ ненегативни бројеви (има их $n - 1$) чији је збир једнак 1, па на основу индуктивне хипотезе важи

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = f(\lambda_1 x_1 + \omega(\frac{\lambda_2}{\omega} x_2 + ... + \frac{\lambda_n}{\omega} x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \omega f(\frac{\lambda_2}{\omega} x_2 + ... + \frac{\lambda_n}{\omega} x_n)$$

$$\lambda_1 f(x_1) + \omega f(\frac{\lambda_2}{\omega}x_2 + ... + \frac{\lambda_n}{\omega}x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \omega\left[\frac{\lambda_2}{\omega}f(x_2) + ... + \frac{\lambda_n}{\omega}f(x_n)\right] = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

, $\square$

при чему прва неједнакост следи на основу дефиниције конвексности (јер важи $\lambda_1 + \omega = 1$), а друга по индуктивној хипотези. Једнакост важи у случају строге конвексности ако и само ако су сви x_i једнаки међу собом или су сви λ_i сем једног једнаки нули.
На овај начин је тврђење доказано за (строго) конвексне функције. Аналогно се доказује за (строго) конкавне.
Јенсенова неједнакост је основа за доказивање великог броја других неједнакости. Навешћемо неке од најпознатијих неједнакости које директно следе из Јенсенове.

Неједнакости између средина као последица Јенсенове

Последица 1. (Тежинска неједнакост између геометријске и аритметичке средине) *Ако су x_i позитивни, а λ_i ненегативни реални бројеви, $i = 1, ..., n$ и $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, тада важи*

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}...x_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n.$$

Једнакост важи ако и само ако су сви x_i међу собом једнаки, или су сви λ_i сем једног једнаки нули.

Доказ. Лако видимо да је за $f(x) = e^x$, $f''(x) \geqslant 0$. Одатле је на основу доказане теореме функција f конвексна. Како су бројеви x_i позитивни, испуњени су услови за примену Јенсенове неједнакости на бројеве $ln(x_i)$, $i = 1, ..., n$ и функцију $f(x) = e^x$,чиме добијамо

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i ln x_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e^{ln x_i} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i.$$

$\square$

Специјално ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$, добијамо класичну неједнакост аритметичке и геометријске средине за n ненегативних бројева која је облика

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Како су x_i позитивни бројеви (различити од нуле), примењујући неједнакост између аритметичке и геометријске средине (краће АГ неједнакост) на бројеве $\dfrac{1}{x_1}, ..., \dfrac{1}{x_n}$, добијамо **тежинску неједнакост између геометријске и хармонијске средине**

$$\frac{1}{\dfrac{\lambda_1}{x_1} + \dfrac{\lambda_2}{x_2} + ... + \dfrac{\lambda_n}{x_n}} \leqslant x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} ... x_n^{\lambda_n}$$

односно њену класичну варијанту

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}.$$

Последица 2. (Тежинска неједнакост између аритметичке и квадратне средине) *Ако су x_i произвољни реални бројеви, а λ_i ненегативни реални бројеви, $i = 1, 2, ..., n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, тада важи*

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n)^2 \leqslant \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_n x_n^2.$$

Једнакост важи ако и само ако су сви x_i међу собом једнаки, или су сви λ_i сем једног једнаки нули.

Доказ. Посматрајмо функцију $f(x) = x^2$ која је строго конвексна на $\mathbb{R}$. Применом Јенсенове неједнакости на функцију f и бројеве x_i и λ_i, $i = 1, 2, ..., n$, добијамо тражену неједнакост. Специјално ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$, добијамо класичну неједнакост аритметичке и квадратне средине за n реалних бројева која је облика

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}.$$

□

До сада смо показали примену Јенсенове у извођењу неједнакости између средина. У даљем решавању задатака претежно ће нам бити потребни класични облици ових неједнакости.
Поред ове примене Јенсенова неједнакост се неретко користи и у класичном решавању задатака. Наведимо неколико примера.

ПРИМЕР 1. (Предлог за ИМО '98) Нека су $r_1, r_2, ..., r_n$ реални бројеви, не мањи од 1. Доказати неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i + 1} \geqslant \frac{n}{1 + \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} r_i}}$$

Доказ. Посматрајмо функцију $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ за коју имамао $f'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ и $f''(x) = \dfrac{e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}$. За $x > 0$, функција f је строго конвексна,на основу доказане теореме. Уочавамо да применом Јенсенове неједнакости на бројеве $x_i = lnr_i \geqslant 0$ i $\lambda_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$, добијамо

$$\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lnr_i}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{lnr_i} + 1}$$

добијена неједнакост је еквивалентна полазној. Једнакост се достиже само када су сви r_i међу собом једнаки.

ПРИМЕР 2. (ИМО '01) Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Доказати да је

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geqslant 1$$

Доказ. Нека је $a + b + c = d, d > 0$. Посматрајмо бројеве $a_1 = \frac{a}{d}, b_1 = \frac{b}{d}, c_1 = \frac{c}{d}$. Тада важи $a_1 + b_1 + c_1 = 1$. Уколико покажемо да неједнакост важи за бројеве a_1, b_1, c_1 то тврђење је еквивалентно томе да неједнакост важи и за бројеве a, b, c јер у неједнакости са бројевима a_1, b_1, c_1 множењем бројиоца и имениоца сваког од разломака са леве стране бројем d добијамо еквивалентну неједнакост полазној.

$$\frac{a_1 d}{\sqrt{(a_1 d)^2 + 8(b_1 d)(c_1 d)}} + \frac{b_1 d}{\sqrt{(b_1 d)^2 + 8(c_1 d)(a_1 d)}} + \frac{c_1 d}{\sqrt{(c_1 d)^2 + 8(a_1 d)(b_1 d)}} \geqslant 1$$

Дакле, не умањујући општост можемо претпоставити да је $a + b + c = 1$. Овакве неједнакости, у којима можемо нормирати збир чланова називамо **хомогеним** неједнакостима.
Функција $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ је строго конвексна на свом домену ($f''(x) = \frac{3}{4}x^{5/2} > 0$). Применом Јенсенове неједнакости на позитивне бројеве $(a^2+8bc), (b^2+8ca), (c^2+8ab)$, коефицијенте a, b, c редом и функцију $f(x)$, добијамо

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}}$$

Даље је

$$1 = (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc \geqslant a^3+b^3+c^3+24abc,$$

што важи на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине (АГ неједнакости). Овим је доказана полазна неједнакост.

Такође велики број неједнакости решавамо коришћењем неједнакости између средина. Навешћемо и један такав пример.

ПРИМЕР 3. (Русија МО '04.) Нека су a, b, c позитивни реални бројеви чија је сума једнака 3. Доказати да је

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ca.$$

Доказ. Знамо да је $2(ab+bc+ac) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$.
Заменом израза, наша неједнакост постаје еквивалентна са

$$\sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc}\sqrt{a} \geqslant 9.$$

На основу АГ неједнакости имамо

$$\sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc}\sqrt{a} = \sum_{cyc}(a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a}) \geqslant 3\sum_{cyc} a = 9.$$

Овим је доказана полазна неједнакост. □

3 Коши-Шварцова неједнакост

3.1 Коши-Шварцова неједнакост и последице

Коши-Шварцова неједнакост, као што нам сам назив каже име је добила по математичарима који су је открили и усавршавали. **Луис Аугустин Коши** први је забележио њен елементаран облик 1821. године. Након тога, независно један од другог, неједнакост су генерализовали **Виктор Буњаковски** 1849. и **Херман Шварц** 1888. године. Често се назива и неједнакост Коши-Буњаковског.

Теорема 3. **(Коши-Шварцова неједнакост)** *Нека су* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *и* $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *произвољне* n*-торке реалних бројева. Тада важи*

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$$

При чему једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Доказ. У овом доказу Коши-Шварцову неједнакост извешћемо као последицу **тежинске неједнакости између аритметичке и квадратне средине (ТАК)**.
Имамо да је

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n)^2 \leqslant \lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+...+\lambda_nx_n^2,$$

за $x_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geqslant 0, (i = 1, ..., n)$ и $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$.

Случај 1: Ако је $b_i \neq 0$, за $i = 1, ..., n$. Применом **ТАК** на $x_i = a_i/b_i$ и $\lambda_i = b_i^2/(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$ добијамо

$$\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}$$

Што је еквивалентно Коши-Шварцовој неједнакости

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2.$$

Случај 2: Ако постоје $b_{i_1} = b_{i_2} = ... = b_{i_k} = 0$, онда имамо

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 = \left(\sum_{i\neq i_1,i_2,...,i_k, 1\leqslant i\leqslant n} a_ib_i\right)^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{i\neq i_1,i_2,...,i_k,1\leqslant i\leqslant n} a_i^2\right)\left(\sum_{i\neq i_1,i_2,...,i_k,1\leqslant i\leqslant n} b_i^2\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Како смо користили **ТАК**, једнакост се достиже ако и само ако су сви x_i међу собом једнаки, односно $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$. Овим је завршен доказ Коши-Шварцове неједнакости. $\square$

Овај доказ као и претходне примере искористили смо да покажемо значај Јенсенове неједнакости као и њених последица у доказивању других неједнакости.

Сада ћемо на још један начин доказати Коши-Шварцову неједнакост

Доказ. Посматрајмо квадратну функцију $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_ix+b_i)^2$. Вредност ове функције за свако $x \in \mathbb{R}$ увек је већа или једнака нули, што значи да је њена дискриминанта $D \leqslant 0$. Расписивањем суме и сређивањем коефицијената уз степене x добијамо $f(x) = (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)x^2 - 2(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$. И имамо да је $D = 4(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^2 - 4(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \leqslant 0$. Што је еквивалентно Коши-Шварцовој неједнакости.
Једнакост се достиже када је $f(x) = 0$. То је могуће ако и само ако је $a_1x + b_1 = a_2x + b_2 = ... = a_nx + b_n = 0$, тј. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$. $\square$

Последица 1. (Шварцова неједнакост) *Нека су $(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $(b_1, b_2, ..., b_n)$ произвољне n-торке реалних бројева и $b_i > 0$, $\forall i \in \{1, 2, .., n\}$. Тада важи*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}.$$

Шварцова неједнакост је директна последица Коши-Шварцове неједнакости примењене на n-торке бројева $(\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, ..., \sqrt{b_n})$ и $(a_1/\sqrt{b_1}, a_2/\sqrt{b_2}, ..., a_n/\sqrt{b_n})$.

Једнакост важи, као и у Коши-Шварцовој неједнакости за одговарајуће n-торке реалних бројева, тј. када је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.
Ову неједнакост је битно истаћи и нагласити као последицу Коши-Шварца, јер врло често доприноси у решавању различитих проблема из неједнакости.

3.2 Интерпретација Коши-Шварцове неједнакости на векторе у аналитичкој геометрији

Ако посматрамо два n-димензиона вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, на основу Коши-Шварцове неједнакости имамо да је

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant ||\vec{a}||\,||\vec{b}||,$$

где су $||\vec{a}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, ||\vec{b}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ интензитети $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и $\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\,\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, њихов скаларни производ.

Ова неједнакост је једна од кључних за извођење многих особина простора $\mathbb{R}^n$. На пример, омогућује нам налажење угла између n-димензионих (не нула) вектора формулом

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}||\,||\vec{b}||},$$

као и увођење појма ортогоналности вектора из услова $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

3.3 Примене Коши-Шварцове неједнакости

Наведимо један пример креативне употребе Коши-Шварцове неједнакости у решавању математичких задатака.

ПРИМЕР 1. (НК '05) Нека су a, b, c и d позитивни реални бројеви, такви да је $a + b + c + d = 1$. Доказати да је

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}.$$

Доказ. Очигледно, на основу Коши-Шварцове неједнакости примењене на бројеве $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d})$ и $(\sqrt{a^3}, \sqrt{b^3}, \sqrt{c^3}, \sqrt{d^3})$ важи неједнакост

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = (a + b + c + d)(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geqslant (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

Означимо $t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ и сада је довољно да покажемо да важи

$$6t^2 \geqslant t + \frac{1}{8},$$

односно

$$\frac{1}{8}(12t + 1)(4t - 1) \geqslant 0.$$

На основу Коши-Шварцове неједнакости примењене на бројеве $(1, 1, 1, 1)$ и (a, b, c, d) испуњено је

$$4t = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geqslant (a + b + c + d)^2 = 1$$

чиме је доказ готов.

4 Јангова неједнакост

Пре него што представимо Хелдерову неједнакост, потребно је да се упознамо са Јанговом неједнакости, јер ће нам користити у доказу Хелдерове.

Теорема 4. (Јангова неједнакост) *Нека су p, q строго позитивни реални бројеви такви да је*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

тада за све ненегативне реалне бројеве a, b важи

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

При чему једнакост важи ако и само ако је $b = a^{p-1}$.

Доказ. Неједнакост је очигледна уколико је $a = 0$ или $b = 0$. Не умањујући општост докажимо да неједнакост важи за $a > 0$ и $b > 0$.

$$\begin{aligned} ab = e^{ln(ab)} = e^{lna+lnb} = e^{\frac{1}{p}lna^p+\frac{1}{q}lnb^q} \\ \leqslant \frac{1}{p}e^{lna^p} + \frac{1}{q}e^{lnb^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

Неједакост важи као последица Јенсенове примењене на функцију $f(x) = e^x$, коефицијенте $1/p, 1/q$ и реалне бројеве lna^p, lnb^q.
Једнакост се остварује за $lna^p = lnb^q$, тј. $b = a^{p-1}$. □

Како смо показали Јангову неједнакост можемо прећи на доказ Хелдерове.

5 Хелдерова неједнакост

Хелдерова неједнакост може се сматрати уопштењем Коши-Шварцове. Неједнакост носи име по немачком математичару **Отоу Хелдеру**, који је ову неједнакост извео 1889. године.

5.1 Хелдерова неједнакост и последице

Теорема 5. (Хелдерова неједнакост) *Нека су $(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $(b_1, b_2, ..., b_n)$ произвољне n-торке ненегативних реалних бројева и p и q позитивни реални бројеви такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, тада је*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{a_1^p}{b_1^q} = \dfrac{a_2^p}{b_2^q} = ... = \dfrac{a_n^p}{b_n^q}$.

НАПОМЕНА. При навођењу теореме подразумевали смо да нису сви чланови једне $n-$торке истовремено једнаки нули.

Доказ. Означимо са $X = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}$, $Y = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$. Ако у Јанговој неједнакости замeнимо $a = \dfrac{a_i}{X}, b = \dfrac{b_i}{Y}$ за $i = 1, ..., n$, добијамо

$$\frac{a_i b_i}{XY} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{X^p} + \frac{1}{q}\frac{b_i^q}{Y^q}.$$

Ако саберемо ових n неједнакости добићемо

$$\frac{1}{XY}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \frac{1}{pX^p}\sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{qY^q}\sum_{i=1}^{n} b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Одатле следи неједнакост коју доказујемо

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant XY.$$

Једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{b_i}{Y} = \left(\dfrac{a_i}{X}\right)^{p-1}$ за $i = 1, ..., n$,
односно $\dfrac{a_1^p}{b_1^q} = \dfrac{a_2^p}{b_2^q} = ... = \dfrac{a_n^p}{b_n^q}$.

$\square$

Уколико бројеви a_i, b_i нису обавезно позитивни, важи следећа неједнакост

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}.$$

Десна неједнакост је последица примене првобитног облика Хелдерове неједнакости на бројеве $|a_i|$ и $|b_i|$, док је лева тривијална неједнакост. Одакле добијамо Хелдерову неједнакост у следећем облику

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}.$$

За $p = q = 2$ добијамо Коши-Шварцову неједнакост.
Поменути облик Хелдерове неједнакост важи и за комплексне бројеве a_i, b_i. У том случају једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{|a_1|^p}{|b_1|^q} = \dfrac{|a_2|^p}{|b_2|^q} = ... = \dfrac{|a_n|^p}{|b_n|^q}$ и при том сви бројеви a_i, b_i имају исти аргумент.

Наведимо и **Хелдерову неједнакост у интегралном облику**. Конкретно за Риманове интеграле или тзв. скуп Риман-интеграбилних реалних функција на неком сегменту $[a, b]$ у $\mathbb{R}$.

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q dx\right]^{1/q}.$$

Од класичне формулације Хелдерове неједнакости у решавању задатака из неједнакости чешће се користи последица коју ћемо извести.

Последица 1. *За m низова позитивних реалниих бројева $(a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,n})$, $(a_{2,1}, a_{2,2}, ..., a_{2,n}), ..., (a_{m,1}, a_{m,2}, ..., a_{m,n})$ важи неједнакост*

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{i,j}}\right)^m.$$

Једнакост важи ако и само ако су ових m низова по индексима пропорционални, тј. ако је $a_{1,1} : a_{2,1} : ... : a_{m,1} = ... = a_{1,n} : a_{2,n} : ... : a_{m,n}$.

Доказ. Доказ ћемо извести принципом математичке индукције по m. За базу индукције имамо $m = 2$, што је еквивалентно са Коши-Шварцовом неједнакости. Претпоставимо да неједнакост важи за m низова

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{i,j}}\right)^{m}.$$

Сада имамо,

$$\prod_{i=1}^{m+1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) = \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{i,j}}\right)^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j}$$

$$= \left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left[(\prod_{i=1}^{m} a_{i,j})^{\frac{1}{m+1}}\right]^{\frac{m+1}{m}}\right)^{\frac{m}{m+1}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left[(a_{m+1,j})^{\frac{1}{m+1}}\right]^{m+1}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right]^{m+1} \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m+1]{\prod_{i=1}^{m+1} a_{i,j}}\right)^{m+1}.$$

Где прва неједнакост важи на основу претпоставке, а другу добијамо применом Хелдерове на одговарајуће низове бројева.

□

5.2 Примене Хелдерове неједнакости

Кроз неколико примера показаћемо примену Хелдерове неједнакости у решавању математичких задатака. Наравно, као што смо и напоменули, реч ће бити о изведеној последици, а не о класичној формулацији Хелдерове неједнакости.

За први пример узећемо неједнакост коју смо већ показали као други пример коришћења Јенсенове неједнакости. Овог пута решење ће бити мало елегантније. Пожељно је нагласити да се често једна неједнакост може доказати на више начина.

ПРИМЕР 1. (ИМО '01) Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Доказати да је

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

Доказ. Означимо леву страну неједнакости са L. На основу Хелдерове неједнакости је

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)\left(\sum_{cyc} a(a^2+8bc)\right) \geqslant (a+b+c)^3.$$

Да би важило $L \geqslant 1$, односно $L^2 \geqslant 1$ довољно је доказати да је

$$(a+b+c)^3 \geqslant \left(\sum_{cyc} a(a^2+8bc)\right)$$

а последња неједнакост је еквивалентна са

$$c(a-b)^2 + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 \geqslant 0.$$

Овим је доказана тражена неједнакост. □

ПРИМЕР 2. Нека су a, b, c три позитивна реална броја таква да је $ab+bc+ca=3$. Доказати да је

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geqslant 8.$$

Доказ. Леву страну неједнакости означимо са L. Тада је

$$4L^2 = 4(a^2b^2+a^2+b^2+1)(b^2+c^2+b^2c^2+1)(a^2+a^2c^2+c^2+1) \geqslant (ab+ac+bc+1)^4 = 4^4,$$

на основу Хелдерове неједнакости. Односно, $L \geqslant 8$. □

6 Неједнакост Минковског

Ова неједнакост немачког математичара **Хермана Минковског** може се једноставно геометријски интерпретирати.

Теорема 6. (Неједнакост Минковског) *Нека је p реалан број строго већи од 1 и нека су $(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $(b_1, b_2, ..., b_n)$ произвољне n-торке ненегативних реалних бројева, тада је*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Доказ. Претпоставимо да нису сви a_i и b_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ једнаки нули (иначе неједнакост тривијално следи). Када распишемо

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)^{p-1}$$

применом Хелдерове неједнакости, добијамо

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}[(a_i+b_i)^{p-1}]^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}[(a_i+b_i)^{p-1}]^q\right)^{1/q}$$

Како је $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, имамо да је $q=\frac{p}{p-1}$. Па је неједнакост еквивалентна

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q}.$$

Дељењем ове неједнакости са $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q}$ добијамо неједнакости коју је било потребно доказати.

Једнакост се остварује ако и само ако је $\dfrac{a_1}{a_1+b_1} = ... = \dfrac{a_n}{a_n+b_n}$ и $\dfrac{b_1}{a_1+b_1} = ... = \dfrac{b_n}{a_n+b_n}$, тј. $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$. Овим је доказ завршен. □

Слично као код Хелдера, уколико су бројеви a_i, b_i произвољног знака, важи следећа неједнакост

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p},$$

при томе се неједнакост достиже ако и само ако је $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$. Неједнакост у овом облику важи и за $p=1$. Када у ту неједнакост уврстимо $p=2$ и $n=3$ и уведемо смену $a_i=p_i-q_i, b_i=q_i-r_i$ и имамо $a_i+b_i=p_i-r_i$, добијамо неједнакост

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(p_i-r_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(p_i-q_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(q_i-r_i)^2}.$$

За тачке $P(p_1,p_2,p_3), Q(q_1,q_2,q_3)$ и $R(r_1,r_2,r_3)$ простора $\mathbb{R}^3$, добили смо добро познату неједнакост троугла

$$d(P,R) \leqslant d(P,Q)+d(Q,R).$$

Према томе неједнакост Минковског може се схватити као уопштена неједнакост троугла на $n-$димензионе просторе.

Напоменимо да постоји и **неједнакост Минковског у интегралном облику**. На поменутом скупу Риман-интеграбилних реалних функција на неком сегменту $[a,b]$ у $\mathbb{R}$, неједнакост је облика

$$\left[\int_a^b|f(x)+g(x)|^p dx\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b|f(x)|^p dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b|g(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

7 Неједнакост реаранжирања и примене

Нејднакост реаранжирања је једна веома једноставна, али изузетно примењива неједнакост која се може користити за извођење многих других неједнакости.
Размотримо следећи пример. Уколико имамо 4 кутије и у свакој редом новцанице од по 10$, 20$, 50$ и 100$. Из сваке од кутија можемо узети 3, 4, 5 или 6 новчаница. Наш циљ је да узмемо што је могуће више новца. Користићемо тзв. **greedy** алгоритам, који налаже да из кутије са највећом вредношћу новчаница узмемо њих највише. Када извршимо овај корак понављамо поступак са остатком кутија и бројем новчаница које можемо да узмемо. Тако ћемо из кутије која има новчанице од по 100$ узети њих 6, из кутије са 50$ њих 5, итд.
Управо овај задатак можемо узети као мотив за извођење поменуте неједнакости.

Теорема 7. (Неједнакост реаранжирања) *Нека су $(a_1,a_2,...,a_n)$ и $(b_1,b_2,...,b_n)$ опадајући низови реалних бројева и $(x_1,x_2,...,x_n)$ произвољна пермутација низа $(b_1,b_2,...,b_n)$, тада важе неједнакости:*

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-i} \leqslant \sum_{i=1}^{n}a_ix_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

Ако је низ (a_i) строго опадајући, лева неједнакост постаје једнакост ако и само ако је $b_{n+1-i}=x_i$, док десна неједнакост постаје једнакост ако и само ако је $b_i=x_i$, $i=1,2,...,n$. У супротном, важе строге неједнакости.

Доказ. Докажимо десну неједнакост принципом математичке индукције.
За $n = 1$ неједнакост тривијално важи.
Претпоставимо да је неједнакост тачна за неки природан број n и докажимо да је тачна и за $n+1$.
Сада разматрамо 2 случаја:
(1) Ако је $x_{n+1} = b_{n+1}$. У овом случају је неједнакост еквивалентна са

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

што важи на основу индуктивне хипотезе.
(2) Ако је $x_k = b_{n+1}, k \neq n+1$. Пермутацију $(x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_{n+1}^{'})$ добијамо заменом k-тог и $n+1$-ог члана пермутације $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$.
Тада је,

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i^{'} - \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = a_k b_l + a_{n+1} b_{n+1} - a_k b_{n+1} - a_{n+1} b_l = (a_k - a_{n+1})(b_l - b_{n+1}) \geqslant 0,$$

где је $b_l = x_{n+1}$. Из овога имамо да је

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i^{'}$$

како је $x_{n+1}^{'} = b_{n+1}$ довољно је показати

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{'} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

а ова неједнакост је већ доказана у случају (1).
Ако је низ a_i строго опадајући, једнакост важи ако и само ако је $x_i = b_i, i = 1, 2, ..., n$.
Потпуно аналогно се доказује лева страна полазне неједнакости. $\square$

Наведимо пример који се једноставно решава применом претходне неједнакости.

ПРИМЕР 1. (Nesbitt-ова неједнакост) Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Тада је

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

При чему једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$.

Доказ. Не умањујући општост претпоставимо да је $a \geqslant b \geqslant c$. Уочавамо да су низови (a, b, c) и $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$ опадајући.
Одатле на основу неједнакости реаранжирања важи

$$2\left(\sum_{cyc} \frac{a}{b+c}\right) \geqslant \sum_{cyc} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\right) = 3.$$

Овим смо доказали тражену неједнакост, при чему једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$. $\square$

8 Чебишовљева неједнакост и примене

Уз помоћ претходно доказане неједнакости реаранжирања, лако ћемо показати неједнакост познатог руског математичара **Пафнутија Чебишова**.

Теорема 8. (Чебишовљева неједнакост) *Ако су* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *и* $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *опадајући низови реалних бројева, тада важе неједнакости*

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leqslant n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

При чему једнакост важи ако и само ако је $a_1 = ... = a_n$ *или* $b_1 = ... = b_n$.

Доказ. Уколико распишемо неједнакости реаранжирања које добијамо цикличним померањем чланова низа b_i за по једно место улево имамо

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leqslant a_1b_2 + a_2b_3 + ... + a_nb_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$...$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Сумирањем свих n неједнакости које следе из неједнакости реаранжирања добијамо тражену неједнакост

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leqslant n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

□

ПРИМЕР 1. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Доказати да важи

$$\frac{\sqrt{a+b}}{c} + \frac{\sqrt{b+c}}{a} + \frac{\sqrt{c+a}}{b} \geqslant \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Доказ. Почетна неједнакост еквивалентна је са

$$\sum_{cyc}(a+b)\frac{\sqrt{(a+c)(b+c)}}{c} \geqslant 4(a+b+c).$$

Не умањујући општост претпоставимо да је $a \geqslant b \geqslant c$. Одатле следи да је низ $(a+b, a+c, b+c)$ опадајући, али не само то, већ је и низ $\left(\frac{\sqrt{(a+c)(b+c)}}{c}, \frac{\sqrt{(a+b)(b+c)}}{b}, \frac{\sqrt{(a+c)(a+c)}}{c}\right)$, такође опадајући.
На основу Чебишовљеве неједнакости имамо

$$\sum_{cyc}(a+b)\frac{\sqrt{(a+c)(b+c)}}{c} \geqslant \frac{1}{3}\sum_{cyc}(a+b)\sum_{cyc}\frac{\sqrt{(a+c)(b+c)}}{c}.$$

Сада је још остало показати да је

$$\sum_{cyc} \frac{\sqrt{(a+c)(b+c)}}{c} \geqslant 6.$$

Имамо да је

$$\frac{1}{3}\sum_{cyc} \frac{\sqrt{(a+c)(b+c)}}{c} \geqslant \sqrt[3]{\frac{(a+c)(a+b)(b+c)}{abc}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ac}2\sqrt{ab}2\sqrt{bc}}{abc}} = 2.$$

Где и прва и друга неједнакост важе на основу АГ неједнакости.

□

9 Још неке примене неједнакости

До сада смо у претходном делу рада приказали различите примене неједнакости. У овој глави идеја је да употпунимо значај неједнакости и њихове примене проширимо на друге математичке области. Кроз неколико примера и задатака илуструјмо неке од могућих ситуација у којима неједнакости играју важну улогу.

ЗАДАТАК 1. Одредити максималну вредност производа два броја чији је збир једнак s.
Решење. Нека су бројеви x, y, такви да је $x + y = s$. На основу АГ неједнакости имамо

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{xy}.$$

Одавде је њихов производ максималан онда када се остварује једнакост, тј. када је $x = y$ и износи $\frac{s^2}{4}$.
Овај задатак можемо дати и у геометријској интерпретацији. У том случају, односио би се на проналажење правоугаоника максималне површине чији је обим једнак $2s$. На основу решења претходног задатка можемо закључити да би тај правоугаоник био квадрат.

ЗАДАТАК 2. Одредити троугао максималне површине ако му је дат обим.
Решење. Нека су странице троугла x, y, z и нека је $x + y + z = o = 2s$ фиксирано. Очигледно је и s константно. На основу Хероновог обрасца површина троугла је дата са $P = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$. Сада на основу АГ имамо да је

$$P = \sqrt{s}((s-x)^{1/3}(s-y)^{1/3}(s-z)^{1/3})^{3/2} \leqslant \sqrt{s}\left(\frac{(s-x)+(s-y)+(s-z)}{3}\right)^{3/2}.$$

Површина је максимална за $(s-x) = (s-y) = (s-z)$, тј. $x = y = z$, па је то једнакостранични троугао.

ЗАДАТАК 3. Од картона облика квадрата странице a, треба одсећи четири подударна квадрата, тако да се од остатка може формирати отворена кутија највеће могуће запремине.
Решење. Означимо страницу квадрата који одсецамо са x. Тада запремина одговарајуће

кутије износи $V = x(a-2x)^2$, при чему је $0 \leqslant x \leqslant a/2$. Примењујући АГ неједнакост имамо следеће

$$V = \frac{1}{4}(4x(a-2x)(a-2x)) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{4x+(a-2x)+(a-2x)}{3}\right)^3.$$

При чему једнакост важи када је $4x = a-2x = a-2x$, тј. $x = \dfrac{a}{6}$.

Дакле, максимална вредност запремине једнака $V_{max} = \dfrac{2}{27}a^3$.

ЗАДАТАК 4. Нека функција f има непрекидан први извод на $\mathbb{R}$ и нека је $f(1) = 0$. Доказати да важи

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leqslant 4\int_0^1 x^2 |f'(x)|^2 dx.$$

Решење. Означимо леву страну неједнакости са L. Како је $f^2(x) \geqslant 0$ можемо записати

$$L = \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \left|\int_0^1 f(x)^2 dx\right|,$$

даље применом парцијалне интеграције имамо

$$L = \left| xf^2(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xf(x)f'(x)dx\right| = 2\left|\int_0^1 xf(x)f'(x)dx\right| \leqslant \int_0^1 2x|f'(x)||f(x)|dx$$

Примењујући АГ неједнакост на $2x|f'(x)|$ и $|f(x)|$ имамо

$$L \leqslant \int_0^1 \frac{4x^2|f'(x)|^2 + |f(x)|^2}{2}dx = 2\int_0^1 x^2|f'(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

Коначно,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leqslant 2\int_0^1 x^2 |f'(x)|^2 dx.$$

10 Закључак

У раду су наведене неке од класичних неједнакости, као и неколико њихових корисних последица.
Пратећи идеју да рад буде базиран на Јенсеновој неједнакости, а друге што је могуће више изведене као последице, често су коришћени ређи, нестандардни докази. Без претераног увођења нових појмова суштина је задржана на самом односу неједнакости и креативности која је неопходна у њиховим применама. Код примене, акценат је дат на решавање математичких задатака, али показано је да неједнакости такође имају прилично широку употребу у различитим сферама математике. Управо због обимности теме и њене широке примене рад обухвата мали део целокупне области. Идеја је била да се читаоци заинтересују и стекну довољно базичног предзнања за даље самостално истраживање.

Желео бих да се захвалим мом ментору Миљану Кнежевићу на пруженој подршци при писању матурског рада, као и на четири године дивне сарадње.

Литература

[1] З. Каделбург, Д. Ђукић, М. Лукић и И. Матић: *Неједнакости*, Материјали за младе математичаре св. 42, Друштво математичара Србије, Београд 2003.

[2] М. Кнежевић: *Неједнакости виши ниво*,(Материјали), 2013.

[3] П. Младеновић, Ђ. Кртинић: *Међународне и балканске математичке олимпијаде 1996-2006. године,* Материјали за младе математичаре св. 48, Друштво математичара Србије, Београд, 2007.

[4] З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић: *Анализа са алгебром 4,* шесто, допуњено издање, "Круг", Београд 2013.

[5] A. Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York 1998, стр. 161-204.

[6] P. K. Hung, *Secrets in Inequalities*, Volume 1-basic inequalities, GIL Publishing House, Romania, 2007.

[7] http://www.artofproblemsolving.com/, Maj, 2015.